Parcours éléve ingénieur Polytech | **Mathématiques S3**
Université Paris - Saclay | **2022-2023**

Feuille d'exercices 1

1. Algébre linéaire : généralités

Ces exercices de révision ne seront pas traités systématiquement en TD, et pas nécessairement lors du premier TD

1.1. Les vecteurs suivants forment-ils une famille libre ? Génératrice ? Quelle est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs

$$\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\7\\9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9\\11\\13\end{pmatrix}$$

et déterminer des équations définissant ce sous-espace.

Mêmes questions pour les vecteurs

$$\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\5\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\8\\12\end{pmatrix}$$

ainsi que pour les vecteurs

$$\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\8\\12\end{pmatrix}$$

1.2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$f(x,y,z) = (\ 2x + y - z,\ 3x - 2y + 4z\ )$$

Trouver la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$, puis lorsque dans $\mathbb{R}^3$ on utilise à la place de la base canonique la base $B' = (v_1, v_2, v_3)$ où

$$v_1 = (1,1,1) \qquad v_2 = (1,1,0) \qquad v_3 = (1,0,0)$$

1.3. Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 1 & 1\\2 & 3 & 7\end{pmatrix}$$

et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ associée. Déterminer une base, donner des équations et préciser la dimension de $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$.

Mêmes questions pour l'application linéaire $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ associée à la matrice

$$N = \begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 1\\1 & 2 & -1 & 4\\1 & 7 & -4 & 11\end{pmatrix}$$

1.4. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme défini par

$$f(1,0,0)=(-1,-6,9) \qquad f(0,1,0)=(2,6,-6) \qquad f(0,0,1)=(1,2,-1)$$

1. Déterminer une base de $\ker(f)$.
2. Montrer que l'ensemble $E = \{\ u,\ f(u)=2u\ \}$ est un plan dont on donnera l'équation et une base.
3. Montrer que $\ker(f)$ et E sont supplémentaires.
4. Donner la matrice de f dans une base formée de bases de $\ker(f)$ et de E.

1.5. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}$$

1. Quel est le rang de (v_1, v_2)
2. Donner une équation du sous-espace vectoriel V engendré par ces vecteurs.
3. Trouver v_3 tel que (v_1, v_2, v_3) forme une base.

1.5. On note $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3, u(e_2) = 3e_2, u(e_3) = -4e_1 + 4e_3$$

1. Écrire la matrice de u dans la base B
2. Déterminer une base de Ker$u$
3. u est-il injectif ? peut-il être surjectif ? Pourquoi ?
4. Déterminer une base de Imu
5. Quel est le rang de u ?

1.6. Pour $x, y \in \mathbb{K}^n$ on note $(x, y) = x_1 \cdot y_1 + ... + x_n \cdot y_n$ le produite scalaire canonique. Soit $(w_1, .., w_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On considère l'espace V définit par les équations $(w_j, z) = 0$. On dit que ces équations sont indépendantes si $(w_1, .., w_p)$ est libre. On veut montrer que si ces équations sont indépendantes alors $\dim(V) = n - p$.
On note $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^p$ l'application $z \mapsto ((w_1, z), ..., (w_p, z))$.

1. Montrer que f est linéaire
2. Montrer en utilisant le théorème du rang que $\dim(V) \geq n - p$.
   On suppose à partir de maintenant les équations indépendantes
3. Montrer que si $p = n$, $(w_1, ..., w_n)$ est une base
4. En déduire (toujours si $p = n$) que $\text{Ker}(f) = 0$: on pourra écrire z comme combinaison linéaire des w_j et montrer que si $z \in \ker(f)$ on a $(z, z) = 0$
5. Montrer que f est bijective
6. En utilisant que si $(w_1, .., w_p)$ est libre elle se complète en une base, montrer que f est surjective
7. En déduire que V est de dimension $n - p$
8. Dans $\mathbb{R}^4$ quell est la dimension de l'espace donné par les équations

$$\{2x + y - t = 0, x - 3t = 0, 2y - 2z + t = 0\}$$

1.7. Soit $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (5, -2, 2)$, $v_3 = (-1, 1, 2)$.

1. Montrer que $B = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de R^3 et écrire la matrice de passage de la base canonique B_{can} à la base B, puis celle de B à B_{can}.
2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme dont la matrice dans B_{can} est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice M de f dans la base B. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis A^n.

2. Déterminants

2.1. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 8 & 6 & 21 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & 3 \\ 7 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2.2. Factoriser sur $\mathbb{R}$ le polynôme

$$P(x) = \begin{vmatrix} -2 & x & 1 & 3 \\ x & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & x \\ 1 & -2 & x & 3 \end{vmatrix}$$

2.3. Sachant que les nombres 1067, 1455, 582, 9700 sont divisibles par 97, montrer sans le calculer que le déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 8 & 2 \\ 9 & 7 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

est un nombre entier divisible par 97.

2.4. La famille $(0,-1,1,0)$, $(1,2,-1,1)$, $(0,1,7,-2)$, $(3,-1,2,0)$, formée de vecteurs de $\mathbb{R}^4$, est-elle une base ?

2.5. Considérons les vecteurs $u = (1,-2,3,0)$, $v = (0,2,-1,1)$ et $w = (-1,0,1,-2)$ de $\mathbb{R}^4$. Démontrer qu'ils forment une famille libre, en déduire qu'ils engendrent un hyperplan et donner une équation cartésienne de cet hyperplan.

2.6. Pour quelles valeurs du nombre réel a le systéme linéaire

$$\begin{cases} ax - y + z = 1 \\ -x + ay + z = 2 \\ x + y + az = 3 \end{cases}$$

admet-il une solution unique ?

2.7. Soit λ un paramétre réel. Considérons la matrice

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \lambda+3 & -2 \\ 1 & -\lambda-2 & 0 & -1 \\ \lambda+3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda+2 \end{pmatrix}$$

1. Factoriser le polynôme $P(\lambda) = \det(M_\lambda)$.
2. Déterminer les nombres réels λ pour lesquels la matrice M_λ est inversible.
3. Calculer le rang de M_λ en fonction des valeurs de λ.

2.8. Soient n un entier impair supérieur ou égal à 3, A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et I_n la matrice identité d'ordre n.

1. Exprimer $\det(-A)$ en fonction de $\det(A)$.
2. Montrer que $A^T = -A$ implique $\det(A) = 0$.
3. Montrer qu'il n'existe pas de matrice A telle que $A^2 = -I_n$.

2.9.* Calculer les inverses des matrices suivantes

1. $$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
2. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercices supplémentaires.

2.10. On considére les déterminants de Vandermonde

$$D(a,b,c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad D(a,b,c,d) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

1. Montrer que $D(a,b,c) = (b-a)(c-a)(c-b)$.
2. Montrer que sans changer la valeur de $D(a,b,c,d)$, on peut remplacer sa dernière ligne par $f(a), f(b), f(c), f(d)$ où f est un polynôme de la forme $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.
3. En choisissant astucieusement f de sorte que dans la derniére ligne figurent trois termes nuls, et en développant, exprimer $D(a,b,c,d)$ en fonction de $D(a,b,c)$. En déduire la valeur de $D(a,b,c,d)$.
4. Peut-on généraliser ?

2.11 Posons $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ et

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

1. Calculer Δ_2 et Δ_3.
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $\Delta_{n+2} = 2\Delta_{n+1} - \Delta_n$.
3. Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $\Delta_n = n + 1$.

3. Diagonalisation

3.1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Factoriser P_f, le polynôme caractéristique de f.
2. Déterminer les valeurs propres de f et une base de chaque espace propre de f.
3. Donner une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f.
4. Diagonaliser la matrice A sur $\mathbb{R}$: on précisera les matrices D (diagonale) et P (inversible) ainsi que la formule qui relie A, D et P.

Mêmes questions pour chacune des matrices suivantes à la place de A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 6 & 4 & -6 \\ 6 & 3 & -7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3.2. Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables sur $\mathbb{R}$? (Réfléchir pour éviter les calculs).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.3*. Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2. Soit f l'application qui à $P(x)$ associe $P(x+1)$.

1. Écrire la matrice de f dans une base de votre choix.
2. L'application f est-elle diagonalisable ? Calculer ses espaces propres.

3.4. Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$? Si oui, les diagonaliser.
On précisera les matrices D (diagonale) et P (inversible) ainsi que la formule qui relie A_i, D et P.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.5. Discuter suivant la valeur du paramétre $m \in \mathbb{R}$ la possibilité de diagonaliser sur $\mathbb{R}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$$

3.6. À quelle condition sur $a \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1-a \\ -1 & 1 & a-1 \\ a-1 & 0 & 2a \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

3.7. Pour quelles valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

3.8. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Démontrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et diagonaliser A sur $\mathbb{C}$.
La matrice A est à coefficients réels : utiliser le lien entre E_λ et $E_{\overline{\lambda}}$ pour calculer moins.

Exercices supplémentaires.

3.9. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$a_{ii} = \alpha \ \text{ pour tout } i, \text{ et } a_{ij} = 1 \ \text{ pour tout } i \neq j$$

1. On écrit $A = (\alpha - 1)I_n + B$ (où I_n est la matrice identité d'ordre n et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).
   Montrer, avec trés peu de calculs, que B est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Diagonaliser B sur $\mathbb{R}$.
2. Diagonaliser A sur $\mathbb{R}$.

3.10. Soit $n \geq 2$, λ_0 un réel donné et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que

$$\operatorname{rang}(A - \lambda_0 I_n) = 1$$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à A.

1. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle $T = \mathcal{M}(f, \mathcal{B})$ est une matrice triangulaire supérieure.
2. Préciser le lien entre trace(A) et trace(T).
   Déterminer les éléments de la diagonale de T en fonction de λ_0 et trace(A).
3. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
   Donner une condition nécessaire et suffisante (portant sur trace(A)) pour que A soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.